

Zoom sur la conjecture de Kakeya

23.7.2026 - | École Polytechnique

La mathématicienne Hong Wang, X2010 et docteure honoris causa de l'École polytechnique, vient de recevoir la médaille Fields en 2026 pour ses travaux sur la conjecture de Kakeya. Présentation d'un problème dont l'origine remonte à plus d'un siècle.

Une question simple, mais complexe à résoudre

Quelle est la forme de plus petite aire à l'intérieur de laquelle on peut faire tourner une aiguille dans toutes les directions ? Voilà la question que posait, en 1917, le mathématicien japonais Soichi Kakeya. Celui-ci a laissé son nom à la conjecture née de ce questionnement.

Si on imagine le problème en dimension 2, comme sur une table, et qu'on fait tourner l'aiguille d'un demi-tour autour de son centre, on balaie l'aire d'un disque de diamètre égal à la longueur de l'aiguille. Cela peut sembler une réponse évidente à la question initiale de Kakeya. Mais, avec d'astucieuses rotations et translations, il existe des possibilités qui donnent une aire plus petite, comme le deltoïde.

Dans le plan, une aiguille (en bleu) peut tourner sur elle même en balayant l'aire d'un deltoïde (en noir)

Mesurer la taille d'ensembles fractals

Plus encore, de manière contre-intuitive, le mathématicien Abram Besicovitch a démontré qu'on pouvait rendre l'aire d'un ensemble au sein duquel l'aiguille peut tourner aussi petite que l'on voulait. Il a même prouvé qu'un ensemble se contentant de contenir l'aiguille dans toutes les directions pouvait avoir une mesure nulle (une aire ou un volume égal à zéro) !

Pour quantifier la taille de tels ensembles abstraits, d'autres mesures sont plus adaptées. « Certains ensembles possèdent des dimensions fractales, c'est-à-dire des nombres non entiers comme 1,8 ou 2,5. Un tel outil de mesure est par exemple la dimension de Hausdorff », explique Thomas Alazard, vice-président du Département de mathématiques de l'École polytechnique.

Exemple d'ensemble fractal solution à la question posée par Kakeya

La conjecture de Kakeya s'énonce alors ainsi:

Dans un espace de dimension n , un ensemble qui peut contenir l'aiguille dans toutes les directions doit posséder une dimension de Hausdorff égale à n .

Autrement dit, même si cet ensemble est si écrasé que son volume usuel est nul, sa dimension fractale doit rester maximale.

Au début de l'année 2025, Hong Wang (Courant Institute of Mathematical Sciences et Institut des

hautes études scientifiques) et Joshua Zahl (Université de Nankai) ont publié sur arXiv un article démontrant la conjecture de Kakeya dans l'espace de dimension 3.

Une succession de grands noms des mathématiques

Dans le plan ($n=2$), la démonstration était acquise. Mais pour $n=3$, le problème est resté complètement ouvert pendant de nombreuses années. « C'est un problème bien identifié depuis longtemps, dont l'énoncé est court. De grands noms des mathématiques s'y sont essayés, comme Thomas Wolff, Nets Katz, Jean Bourgain ou Terence Tao. C'est en partie ce qui a fait le retentissement du travail de Hong Wang et Joshua Zahl », précise Thomas Alazard.

Rapidement repéré et soutenu par des experts du domaine, ce résultat a reçu beaucoup d'échos dans la communauté mathématique. La mathématicienne chinoise s'est ainsi vu décerner la médaille Fields, prestigieuse récompense du domaine.

Spécialiste de la théorie géométrique de la mesure, des équations aux dérivées partielles et de l'analyse harmonique, Hong Wang a été formée à l'École polytechnique. « Le fondateur de l'analyse harmonique, qui consiste au départ à décomposer un signal en différentes sinusoïdes (les harmoniques), est Joseph Fourier. Il fut enseignant à l'École à la fin du XVIIIe siècle, note Thomas Alazard. Les prestigieuses récompenses récemment attribuées à Hong Wang viennent souligner l'excellence toujours actuelle de notre formation. C'est une très bonne nouvelle pour notre communauté. »

<https://www.polytechnique.edu/actualites/zoom-sur-la-conjecture-de-kakeya>