

# Das Geheimnis der 17 Muster: Wie Mathematik zum Greifen nah wird

6.7.2026 - Igor Burban, Tobias Weich, Max Hoffmann | Universität Paderborn

## Sonderforschungsbereich vereint Expertisen der Universitäten Paderborn und Bielefeld.

Was verbindet ein historisches Wandbild aus Granada mit moderner Spitzenforschung und warum gibt es genau 17 verschiedene Arten, einen Fußboden zu fliesen? Die Mathematik, die diesen Fragestellungen zugrunde liegt, bildet das Fundament für die Forschung, wie sie der Sonderforschungsbereich/Transregio (SFB/TRR) 358 „Ganzzahlige Strukturen in Geometrie und Darstellungstheorie“ der Universitäten Paderborn und Bielefeld betreibt. Der Verbund untersucht ganzzahlige Strukturen, die in der Geometrie beispielsweise als Pflasterungen auftreten und komplexe mehrdimensionale Muster ergeben können, wie bei der spanischen Alhambra. Die grundlegenden algebraischen Konzepte macht die Initiative zudem für Schüler\*innen durch interaktive Formate begreifbar. Dabei zeigt sie auch: Mathematik ist mehr als bloßes Rechnen – sie ist ein Werkzeug, um Ordnung in der Welt zu erkennen.

## Vom maurischen Palast zur universellen Regel

In der Alhambra, einem bekannten maurischen Palast in Granada, schmücken sich endlos wiederholende Muster die Wände. Dreht man diese Ornamente an bestimmten Punkten, sehen sie identisch aus. Mathematisch handelt es sich dabei um sogenannte „Wandmustergruppen“. Und genau hier liegt das erste Überraschungsmoment: Es gibt nur 17 verschiedene Symmetrie-Baupläne für solche ebenen Muster. Mehr sind mathematisch nicht möglich. Die Zahl 17 ist also kein Zufall, sondern Teil einer tiefgreifenden Ordnung. „In einem eindimensionalen Streifen wie etwa einer Tapetenbordüre gibt es nur sieben Arten solcher Muster. Betrachtet man stattdessen dreidimensionale Kristallgitter – die Grundbausteine von Materialien in der Physik und der Chemie – steigt die Zahl auf 230. Diese Klassifikationen sind die Basis dafür, wie Wissenschaftler\*innen Materialien verstehen und entwickeln“, erklärt Prof. Dr. Igor Burban von der Universität Paderborn, stellvertretender Sprecher des Sonderforschungsbereichs.

## Ganzzahlige Strukturen als verbindendes Element

Was genau erforscht der SFB 358 nun? Ganzzahlige Strukturen sind Anordnungen, die sich nur in ganzen, abzählbaren Schritten bewegen und drehen lassen. Ähnlich wie die Quadrate auf einem Schachbrett oder die Wiederholungen im Alhambra-Muster. Diese „Ganzzahligkeit“ verbindet scheinbar Unverwandtes miteinander: die geometrischen Formen der Tapete, die Ringstruktur der ganzen Zahlen und die Gitter, mit denen Mathematiker\*innen den Raum vermessen. Die Erkenntnis, dass es genau 17 Muster gibt, öffnet die Tür zu einem viel größeren Ordnungssystem in der Algebra. Für die Forscher\*innen im Verbund sehen die Fragen etwa so aus: Wie viele Anordnungen einer bestimmten Form gibt es? Wie verändert sich die Anzahl der Punkte im Muster, wenn man den Betrachtungsausschnitt vergrößert? Haben Muster mit besonders vielen Symmetrien besondere mathematische Eigenschaften? Die Fragen führen in hochkomplexe Gebiete wie die Theorie automorpher Formen oder die sogenannte  $p$ -adische Geometrie. Der SFB knüpft dabei an eine lange Tradition der Zusammenarbeit zwischen den Universitäten Paderborn und Bielefeld an und hat diese in den vergangenen vier Jahren der ersten Förderperiode enorm intensiviert. Ergebnisse aus der Kooperation zeigen bereits, wie Geometrie, Analysis und Algebra Hand in Hand gehen. Erst kürzlich konnte der Paderborner Prof. Dr. Tobias Weich zum Beispiel bisher offene Vermutungen von

Forscher\*innen aus Yale beweisen. Nach konkreten Anwendungen gefragt, antwortet Prof. Burban: „Fast alles, was wir im SFB erforschen, ist rein aus der Mathematik motiviert. Aber schaut man genauer auf aktuelle technische Revolutionen wie künstliche Intelligenz, Quantentechnologien oder Quantencomputing, dann wird dort in existenzieller Weise mathematische Hochtechnologie genutzt. Und genau solche mathematischen Technologien entwickeln wir im Sonderforschungsbereich.“

## **Mit Kacheln forschen: „Experience Structures!“**

Als einer von sehr wenigen mathematischen Sonderforschungsbereichen verfügt der Bielefeld-Paderborn-SFB über ein Teilprojekt „Ö“, das sich mit Öffentlichkeitsarbeit und Wissenschaftskommunikation beschäftigt. Der SFB 358 hat diese Struktur im Frühjahr 2025 im Rahmen eines erfolgreichen Nachantrags der Projektleiter Dr. Max Hoffmann und Prof. Dr. Tobias Weich, beide von der Universität Paderborn, etabliert. Das Motto lautet: „Experience Structures! – Strukturen erleben!“ Ziel ist es, Schüler\*innen, Lehrkräfte und die allgemeine Öffentlichkeit an die universitäre Mathematik heranzuführen und ein realistisches Bild von moderner mathematischer Forschung zu geben. Statt trockener Formeln arbeiten die Forscher\*innen mit greifbaren Objekten, die sie teilweise selbst entwickeln. Im 3D-Druck entstehen dabei passgenaue Kacheln – Sechsecke, Sternformen und andere Geometrien, die exakt ineinandergreifen. Wer diese Kacheln dreht, aneinanderlegt oder per App am Bildschirm animiert, erzeugt die Symmetrie selbst. Die Ziele des SFB, insbesondere des Teilprojekts Ö, gehen über die Schul-Workshops hinaus. Denn das Bewusstsein für die Besonderheiten der reinen Mathematik soll nachhaltig gestärkt werden. Deshalb entwickeln die Forscher\*innen u. a. frei verfügbare Lehrmaterialien (sogenannte OER, Open Educational Resources). Der SFB liefert also fertige Konzepte, die Lehrer\*innen, Studierende und Dozent\*innen nutzen, anpassen und weitergeben können.

## **Förderung seit 2023**

Sonderforschungsbereiche sind langfristig angelegte Forschungseinrichtungen der Universitäten, in denen Wissenschaftler\*innen im Rahmen eines fächerübergreifenden Forschungsprogramms zusammenarbeiten. Transregio heißt ein Sonderforschungsbereich dann, wenn er von zwei oder drei Universitäten gemeinsam getragen wird. Die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) fördert den SFB 358 seit Januar 2023 mit insgesamt rund 10,7 Millionen Euro.

<https://www.uni-paderborn.de/nachricht/159961>