

Lendületesek: Pach Péter Pál

9.3.2026 - | Magyar Tudományos Akadémia

A Lendület Program segítségével folytatja kutatásait Pach Péter Pál, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos főmunkatársa és az MTA-HUN-REN RI Lendület Aritmetikai Kombinatorika Kutatócsoport vezetője, akit szerzőtársaival közösen 2024-ben Frontiers of Science Award díjjal tüntettek ki egy 2016-os cikkükért, amelyben a polinom módszer egy új változatát dolgozták ki. A kutatócsoport munkája az aritmetikai kombinatorika tárgykörébe tartozó matematikai alapkutatás. A területnek azonban számos kapcsolódási pontja van a matematika egyéb ágaival, így a kutatócsoport eredményeit sok más kérdést kutató matematikus is hasznosítani fogja.

Pach Péter Pál, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos főmunkatársa nem először nyert el támogatást az MTA Lendület-pályázatán, hiszen Aritmetikai Kombinatorika Kutatócsoportja immár a haladó kategóriában alakulhatott újjá. Az aritmetikai kombinatorika elméleti matematikai tudományterület, és ahogy a neve is utal rá, a számelmélet és a kombinatorika határmezsgyéjén helyezhető el, miközben számos más matematikai terület, például a harmonikus analízis elméletével is összefügg.

A 2024-ben Frontiers of Science Award díjjal elismert cikk.

„Mi az aritmetikai kombinatorikán belül legfőképpen algebrai módszerek kidolgozására koncentrálnak. Ezeket az eljárásokat rendszerint polinom módszereknek hívják,

segítségükkel keresünk meghatározott halmazokban mintázatot, struktúrákat és összefüggéseket

– mondja Pach Péter Pál. – A vizsgálataink egy részében adott valamilyen aritmetikai konfiguráció, amelyről kikötjük, hogy nem szerepelhet valamilyen halmazban, például egy véges test feletti vektortérben. E konfiguráció lehet például egy számtani sorozat. Az általunk kidolgozott módszerek az ilyen halmazok struktúrájának matematikai vizsgálatát teszik lehetővé.”

A kutatócsoport hasonló lineáris algebrai módszereket használ a Alon-Jaeger-Tarsi-sejtés, illetve az additív bázis-sejtés vizsgálatára. Az Alon-Jaeger-Tarsi-sejtés azt állítja, hogy ha egy legalább négyelemű test felett veszünk egy vektorteret, illetve annak vesszük két bázisát, akkor mindig lehet találni olyan vektort, aminek egyik bázisban sincsen nulla koordinátája. Erről már a nyolcvanas évek végén bebizonyították, hogy a sejtés teljesül, ha a test elemszáma valódi prímhatvány, vagyis egy prímszám egynél nagyobb kitevős hatványa. Ezután már csak az az eset maradt nyitva bizonyítatlanul, ha az elemszám prímszám (nem pedig hatvány).

Az előző Lendület-pályázat idején Pach Péter Pál és Nagy János megoldották a sejtés nyitva maradt esetét, ha elegendően nagy prím az elemszám.

A probléma megoldásában csoportgyűrű-azonosságokat használtak.

„Ezeknél az algebrai technikáknál mindig az az első lépés, hogy kifejezzük az állítást valamilyen egyenlet teljesülése vagy nem teljesülése formájában. De az érdekes rész csak ezután következik – folytatja a kutatócsoport-vezető. – A számtani sorozatos problémák esetében az előrelépéshez újfajta rangfogalmat kellett kidolgoznunk a hipermátrixokra, míg az Alon-Jaeger-Tarsi-sejtésnél a csoportgyűrű-azonosságok jelentették a megoldás kulcsát. Minthogy ez utóbbi sejtés a kis prímeke

továbbra is nyitva maradt, a jövőben e területen igyekszünk továbblépni. Ez azért is fontos lenne, mert e sejtéshez több más matematikai részterület is szorosan kapcsolódik.”

Egy ilyen kérdés az additív bázis-sejtés. E sejtés azt állítja, hogy minden prímszám esetén létezik olyan c konstans (ami függhet a p prímszámtól), melyre teljesül, hogy ha vesszük a p elemű test feletti vektortér c darab bázisának unióját mint egy multihalmazt, akkor ez additív bázist alkot. Ez azt jelenti, hogy ha e multihalmaz elemeinek vesszük a nulla-egy együtthatós lineáris kombinációit, akkor a tér összes elemét megkapjuk. Pach Péter Pál természetesen jól tudja, hogy a kutatási témája a nem matematikusok számára nehezen befogadható. Vizsgálataik lényegét kissé közérthetőbben így foglalta össze:

„Mi tehát elméleti matematikai alapkutatókat folytatunk.

Az általunk vizsgált kérdéseket aszerint választjuk ki, hogy mennyire izgalmasak, milyen sok egyéb matematikai részterülettel függenek össze, és milyen alkalmazásaik vannak.

Az eredményeinknek számos matematikán belüli alkalmazása lehetséges. A számelmélet egyik központi kérdése például az, hogy hány számot tudunk egy halmazból kiválasztani úgy, hogy azok ne tartalmazzanak valamilyen hosszú számtani sorozatot. E probléma egyfajta modellezése az, ha ezt nem egész számok körében tiltjuk meg, hanem valamilyen véges test feletti vektortérben. Mivel léteznek módszerek, amelyekkel e vektortérben kissé könnyebb dolgozni, ha ott már sikerül eredményt elérni, az sok esetben átültethető az egész számok esetére is.”

A kutatásaik másik motivációja az eredményeik véges geometriával fennálló kapcsolatában gyökerezik. Az additív kombinatorikában vizsgált problémák egy része ugyanis megfeleltethető a véges geometria bizonyos kérdéseinek. „A módszereink jellegéből adódóan az algebrával is szoros a kapcsolatunk, és e kérdések összefüggenek számítástudományi, illetve információelméleti és gráfelméleti problémákkal is – mondja a kutató. – A számtani sorozatokkal kapcsolatos eredményeinknek egy része összefügg a mátrixszorzás gyorsítására irányuló erőfeszítésekkel is. Márpedig a mátrixszorzás rendszeresen megjelenik a mindennapos számítástechnikai alkalmazásokban is. Ezen alkalmazásokat azonban nem közvetlenül mi vizsgáljuk, hanem a mi elméleti eredményeinket használják fel mások a saját alkalmazott kutatásaikhoz.”

A Pach Péter Pál kutatásairól szóló összeállítás angol nyelvű változatát ide kattintva olvashatja.

https://mta.hu/mta_hirei/lenduletesek-pach-peter-pal-115001